روش بازگشتی استدلالی نیرومند!

عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی شیراز

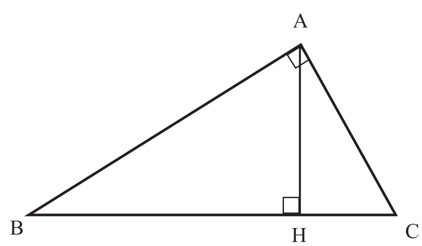
مقدمه

«اثبات بازگشتی» روشی است که بیشتر برای اثبات درستی نابرابری‌ها از آن استفاده می‌شود. در این روش درستی حکم را می‌پذیریم و با انجام محاسبات لازم و کمک گرفتن از ویژگی‌ها و خواص مرتبط با مسئله، نابرابری یا گزارهٔ حکم را تا آنجا ساده می‌کنیم که به گزاره‌ای برسیم که بدیهی است، یا درستی آن را از قبل می‌دانیم. در صورتی که مراحل انجام شده برگشت‌پذیر باشند، درستی روش اثبات تأیید شده است.

در این مقاله نمونهٔ مسائل متنوعی از جبر، مثلثات و به‌ویژه هندسه که جای خالی آن بیشتر احساس می‌شود، طرح و حل شده‌اند تا فراگیر بودن استفاده از این روش در اغلب شاخه‌های ریاضیات دبیرستانی نشان داده شود.

● **مثال ۱.** مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{AH^{۲}}=\frac{۱}{AB^{۲}}+\frac{۱}{AC^{۲}}$$



◀ **اثبات:** درستی حکم را می‌پذیریم و به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{AH^{۲}}=\frac{AC^{۲}+AB^{۲}}{AB^{۲}.AC^{۲}},\ AC^{۲}+AB^{۲}=BC^{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{AH^{۲}}=\frac{BC^{۲}}{AB^{۲}.AC^{۲}}\Rightarrow BC^{۲}.AH^{۲}=AB^{۲}.AC^{۲}$$

$$\Rightarrow BC.AH=AB.AC\Rightarrow \frac{۱}{۲}BC.AH=\frac{۱}{۲}AB.AC$$

تساوی اخیر بدیهی است (زیرا هر دو طرف برابر S مساحت مثلث ABC هستند) و تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیرند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی، حکم مسئله برقرار است.

● **مثال ۲.** ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}(\sqrt{۴۶}-\sqrt{۲})=\sqrt{۱۲-\sqrt{۲۳}}$$

◀ **اثبات:** درستی تساوی را می‌پذیریم و دو طرف را به توان دو می‌رسانیم:

$$\frac{۱}{۴}(\sqrt{۴۶}-\sqrt{۲})^{۲}=۱۲-\sqrt{۲۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}(۴۶+۲-۲\sqrt{۹۲})=۱۲-\sqrt{۲۳}$$

$$\Rightarrow ۴۸-۲\sqrt{۹۲}=۴۸-۴\sqrt{۲۳}\Rightarrow ۲\sqrt{۹۲}=۴\sqrt{۲۳}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۴\times ۲۳}=۴\sqrt{۲۳}\Rightarrow ۴\sqrt{۲۳}=۴\sqrt{۲۳}$$

مراحل بازگشت‌پذیرند، لذا تساوی اولیه برقرار است.

● **مثال ۳.** ثابت کنید:

$$(\tan\theta+\cot\theta)^{۲}\geq ۴;\theta\neq\frac{k\pi}{۲}$$

◀ **اثبات:** فرض کنیم $\tan\theta=a$ در این صورت $\cot\theta=\frac{۱}{a}$ پس باید نشان دهیم:

$$(a+\frac{۱}{a})^{۲}\geq ۴$$

فرض کنیم این نامساوی درست باشد، پس:

$$a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}+۲\geq ۴\Rightarrow a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}-۲\geq ۰$$

$$\Rightarrow (a-\frac{۱}{a})^{۲}\geq ۰$$

درستی رابطهٔ اخیر واضح است و روابط همگی برگشت‌پذیرند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است.

اینک به چند نمونهٔ دیگر از مسائل هندسی که پیرامون خواص مثلث برقرار است، می‌پردازیم و درستی آن‌ها را به روش اثبات

بازگشتی، مطرح می‌کنیم.

● **مثال ۴.** ثابت کنید اگر مثلثی با طول اضلاع a، b و c وجود داشته باشد، مثلثی با طول ضلع‌های $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ نیز وجود دارد.

◀ **اثبات:** کافی است نشان دهیم که نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$$
$$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$$
$$\sqrt{c}+\sqrt{a}>\sqrt{b}$$

یکی از سه نابرابری را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه مشابه است. از روش اثبات بازگشتی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم: $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$، در این صورت:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c})^2$$
$$a+b+2\sqrt{ab}>c$$

نابرابری آخر درست است، زیرا در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است؛ یعنی: $a+b>c$. پس:

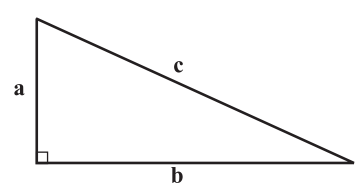
$$a+b+2\sqrt{ab}>c+2\sqrt{ab}>c$$

بنابراین نابرابری $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ درست است و حکم ثابت شده است.

● **مثال ۵.** ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، مکعب طول وتر از مجموع مکعبات دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

◀ **اثبات:** اگر a و b طول دو ضلع و c طول وتر باشند، ثابت می‌کنیم:

$$c^3>a^3+b^3$$



درستی حکم را می‌پذیریم. با توجه به رابطهٔ **فیثاغورس** که: $c^2=a^2+b^2$، داریم:

$$c\times c^2>a^3+b^3$$
$$\Rightarrow (a^2+b^2)c>a^3+b^3 \Rightarrow a^2c+b^2c>a^3+b^3$$
$$\Rightarrow a^2c-a^3+b^2c-b^3>0$$
$$\Rightarrow a^2(c-a)+b^2(c-b)>0$$

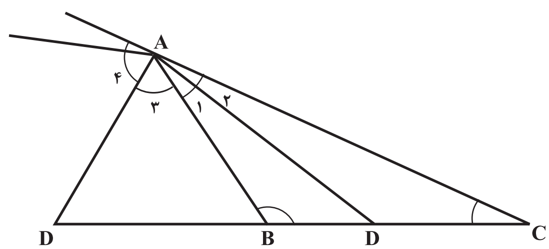
درستی رابطهٔ اخیر از آنجا ناشی می‌شود که در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ وتر از طول دو ضلع بزرگ‌تر است؛ یعنی: $c>a$ و $c>b$.

پس: $c-a>0$ و $c-b>0$ و جمع دو مقدار مثبت، مثبت است. روابط همگی برگشت‌پذیرند و لذا حکم برقرار است.

● **مثال ۶.** مثلث ABC را که در آن فرض کرده‌ایم: $\hat{B}>\hat{C}$ و $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ (و یا با فرض $\hat{C}>\hat{B}$ و $\hat{C}-\hat{B}=90^\circ$، یعنی در حالت کلی $|\hat{B}-\hat{C}|=90^\circ$)، مثلث شبه‌قائمه در رأس A می‌نامیم.

ثابت کنید در این مثلث طول‌های نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی رأس A با هم برابرند.

◀ **اثبات:** مطابق شکل در مثلث ABC، $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ و AD و AD′ نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A هستند ($\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{A}_3=\hat{A}_4$). می‌خواهیم ثابت کنیم: AD=AD′.



با پذیرفتن درستی حکم، و با توجه به اینکه نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس در هر مثلث، همواره بر یکدیگر عمودند (چرا؟)، پس مثلث DAD′ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در نتیجه: $\hat{D}=\hat{D}'=45^\circ$ و در مثلث ABD داریم:

$$\hat{B}+\hat{A}_1+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}+45^\circ=180^\circ$$
$$\Rightarrow 2\hat{B}+\hat{A}=270^\circ \Rightarrow 2\hat{B}+180^\circ-\hat{B}-\hat{C}=270^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=90^\circ$$

این نتیجه هم معادل با فرض مسئله است. تمام مراحل برگشت‌پذیر هستند و استدلال اصلی را با طی مسیر عکس، خودتان انجام دهید.

امیدواریم مثال‌های فوق آن‌قدر متنوع بوده باشند که فراگیربودن این روش را در اثبات‌ها نشان دهند. اکنون اگر به حل مسئله‌های خاص علاقه‌مند هستید، پیشنهاد می‌شود مسائل زیر را هم ببینید که دو مسئلهٔ ویژه از هندسه هستند.

مسئلهٔ ۱. (نامساوی فینسلر ـ هادویگر) در هر مثلث به اضلاع a، b و c و مساحت S، نشان دهید نامساوی زیر برقرار است:

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

◀ **اثبات:** با فرض اینکه $2p=a+b+c$ محیط مثلث باشد، قرار می‌دهیم:

$x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c$

لذا داریم: $p=x+y+z$. فرض کنیم نامساوی حکم درست باشد.
طبق فرمول **هرون** داریم:

$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ و لذا:

$$S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

اکنون نامساوی حکم مسئله را برحسب متغیرهای x، y و z بازنویسی می‌کنیم:

$$(y+z)^2+(x+z)^2+(x+y)^2\geq 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$
$$+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
$$\Rightarrow xy+yz+xz\geq\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$
$$\Rightarrow (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2+2x^2yz+2y^2xz$$
$$+2z^2xy\geq 3x^2yz+3y^2xz+3z^2xy$$
$$\Rightarrow (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2\geq xyz(x+y+z)$$

قرار می‌دهیم $A=xy$، $B=yz$ و $C=xz$ و خواهیم داشت:

$$A^2+B^2+C^2\geq AB+BC+AC$$

که درستی آن بدیهی است! (اگر اثبات آن را نمی‌دانید دو طرف را در ۲ ضرب کرده و عبارت‌ها را به سمت چپ نابرابری ببرید) روابط همگی برگشت‌پذیرند و بنابراین طبق روش اثبات بازگشتی حکم برقرار است. توجه کنیم که حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $x=y=z$ و یا $a=b=c$؛ یعنی مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

مسئلهٔ ۲. اگر A، B و C اندازهٔ زاویه‌های یک مثلث دلخواه و x، y و z اعداد حقیقی مثبت و دلخواه باشند، ثابت کنید:

$$x^2+y^2+z^2\geq 2xy\cos A+2yz\cos B+2xz\cos C$$

◀**اثبات:** با پذیرش حکم و توجه به اینکه:

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B$$

با جای‌گذاری این رابطه در نامساوی فوق و دسته‌بندی مناسب به شرح زیر داریم:

$$x^2+y^2+z^2\geq 2xy\cos A+2yz\cos B$$
$$+2xz\sin A\sin B-2xz\cos A\cos B$$

و

$$\begin{cases} x^2\underbrace{(\sin^2 A+\cos^2 A)}_{1}+y^2+z^2\underbrace{(\sin^2 B+\cos^2 B)}_{1} \\ =x^2+y^2+z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y^2-2xy\cos A-2yz\cos B+2xz\cos A\cos B$$
$$+x^2\cos^2 A+z^2\cos^2 B)+(x^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B$$
$$-2xz\sin A\sin B)\geq 0$$

$$\Rightarrow (y-x\cos A-z\cos B)^2+(x\sin A-z\sin B)^2\geq 0$$

درستی نامساوی اخیر بدیهی است و همهٔ روابط برگشت‌پذیرند. در نتیجه براساس روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است.

تمرین‌ها

۱. نشان دهید در هر مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a و b و وتر c داریم:

$$a+b\leq c\sqrt{2}$$

۲. ثابت کنید در هر مثلث دلخواه، نصف محیط مثلث، از طول هر ضلع آن بزرگ‌تر است.

۳. مثلث ABC با طول اضلاع a، b و c و مساحت S مفروض است. ثابت کنید:

الف) $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$

ب) $ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S$

۴. در هر مثلث با طول اضلاع a، b و c و نصف محیط P ثابت کنید:

$$\frac{a}{P-a}+\frac{b}{P-b}+\frac{c}{P-c}\geq 6$$

۵. ثابت کنید:

$$\frac{5^n}{1+5^{2n}}\geq\frac{5^{n+1}}{1+5^{2n+2}}\qquad (n\in N)$$

۶. ثابت کنید:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geq\frac{1}{2}\qquad (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

۷. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})=\sqrt{8-\sqrt{15}}$$

۸. در شکل زیر می‌دانیم: $\hat{B}=\hat{D}$، $\hat{C}=\hat{E}$ و DE=BC. ثابت کنید: AB=AD.